# 高等代数中的不等式总结以及一次成功的实践

泉州师范学院 赖宝锋

2023年12月3日

# 目录

# 高等代数中的不等式



1. 矩阵秩不等式

(1) 设$A, B$为$m \times n$阶矩阵, 则

$$r(A) \leq \min(m, n),$$

$$r(A+B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B),$$

$$|r(A) - r(B)| \leq r(A - B).$$

(2) 设$A$为$m \times n$阶矩阵, $B$为$n \times l$阶矩阵, 则

$$r(AB) \leq \min\left(r(A), r(B)\right).$$

(3) 设$A$为$m\times n$阶矩阵, $B$为$n\times l$阶矩阵, $AB=0$, 则

$$r(A)+r(B)\leq n.$$

类似地, 有:

(4) 设$n$阶矩阵$A_1,A_2,\ldots,A_s$满足$A_1A_2\cdots A_s=0$, 则

$$r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_s)\leq (s-1)n.$$

(5)(Sylvester不等式) 设$A$为$m\times n$阶矩阵, $B$为$n\times l$阶矩阵, 则

$$r(AB)\geq r(A)+r(B)-n.$$

以及其更加一般的情形:

(6)(Frobenius不等式) 设$A, B, C$分别为$m \times n, n \times l, l \times r$阶矩阵, 则

$$r(AB) + r(BC) \leq r(B) + r(ABC).$$

凡是不等式, 都最关心最优常数与取等条件. 以下为$r(A+B) = r(A) + r(B)$的一个充分条件和充要条件.

(7) 设$n$阶矩阵$A, B$满足$AB = BA = 0$,$r(A) = r(A^2)$, 则

$$r(A+B) = r(A) + r(B).$$

(9) 设$A, B$为$n$阶方阵, 则$r(A+B)=r(A)+r(B)$当且仅当存在可逆方阵$P, Q$, 使得

$$PAQ=\left(\begin{array}{cc} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$PBQ=\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{array}\right),$$

其中, $r=r(A), s=r(B), r+s\leq n$.

(10) 设$A, B$都是$n$阶矩阵, 且$A$可逆, 则

$$r(A - B) = r(A) - r(B)$$

当且仅当

$$BA^{-1}B = B.$$

当$A, B$可交换时, 不等式$r(A + B) \leq r(A) + r(B)$还可以进一步精确化.

(11) 当$A, B$可交换时,

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B) - r(AB).$$

2. Cauchy-Buniakowsky-Schwarz不等式

设$V$为欧氏空间, 则对任意$\alpha,\beta\in V$, 有

$$|(\alpha,\beta)|^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta),$$

且不等式取等号当且仅当$\alpha,\beta$线性相关.

3. 二次型中相应的不等式

(1)(Rayleigh商不等式) 设$A$为$n$阶实对称矩阵, 则对任意$0\neq x\in R^n$, 有

(i)

$$\lambda_{\min}(A)x^Tx\leq x^TAx\leq\lambda_{\max}(A)x^Tx,$$

其中, $\lambda_{\min}(A)$与$\lambda_{\max}(A)$分别为$A$的最小与最大特征值.

$(ii)$ 当且仅当$x$为$A$的最小特征值所对应特征向量时, 前一个不等式成立.

当且仅当$x$为$A$的最大特征值所对应特征向量时, 后一个不等式成立.

(2) Hadamard不等式

设$A=(a_{ij})$为$n$阶正定矩阵, 则

$$|A| \leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

且不等式取等号当且仅当$A$为对角矩阵.

这不等式对于半正定矩阵依然成立,只是不具有这样的取等条件.

更加一般的结论是:

(3) 设$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$为正定矩阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B^T & C \end{vmatrix} \leq |A|\,|C|\,,$$

且不等式取等号当且仅当$B=0$.

由于对任意$n$阶实矩阵$A=(a_{ij})$, $A'A$都是半正定矩阵, 因此, 还有

(4) 对任意$n$阶实矩阵$A=(a_{ij})$, 有

$$|A|^2=|A^TA|\leq\prod_{j=1}^{n}|\alpha_j|^2,$$

其中, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$A$的列向量. 当$A$可逆时, 不等式取等号当且仅当$A$的列向量两两正交.

充分利用(半)正定矩阵的平方分解, 还可以得到(半)正定矩阵的一些行列式性质:

(5) 设$n\geq 2$, $A$为$n$阶正定矩阵, $B$为$n$阶半正定矩阵, 则

$$|A+B|\geq|A|+|B|,$$

且不等式取等号当且仅当$B=0$.

(6) $A$为$n$阶正定矩阵, $B$为$n$阶实反对称矩阵, 则

$$|A+B| \geq |A|,$$

且不等式取等号当且仅当$B=0$.

接下来来看一类与柯西不等式有关的问题. 先来看几个例子.

对任意$f(x) \in L^2[0,\pi]$, 有

$$\left[\int_0^\pi f(x)\cos x dx\right]^2 \le \int_0^\pi f^2(x)dx \int_0^\pi \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f^2(x)dx. \tag{1}$$

$$\left[\int_0^\pi f(x)\sin x dx\right]^2 \le \int_0^\pi f^2(x)dx \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f^2(x)dx. \tag{2}$$

于是,

# 一次成功的实践



$$\left[\int_0^\pi f(x)\cos x dx\right]^2+\left[\int_0^\pi f(x)\sin x dx\right]^2 \le \pi\int_0^\pi f^2(x)dx. \tag{3}$$

不等式(3)取等号等价于不等式(1), (2)都取得等号. 不等式(1)取等号等价于存在实数$\lambda$,使得

$$f(x)=\lambda\cos x, a.e. x\in[0,\pi].$$

不等式(2)取等号等价于存在实数$\mu$,使得

$$f(x)=\mu\sin x, a.e. x\in[0,\pi].$$

(以下不引起混淆就不再写$a.e$了)

但$sinx, cosx$在$L^2[0,\pi]$中线性无关，因此，不等式(3)取得等号当且仅当

$$f(x) = 0$$

因此，我们也不能就断言$\pi$为不等式(3)的最优常数.

类似地，由柯西不等式，有

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}, \tag{4}$$

$$\left|\int_0^1 x^4 f(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_0^1 x^8 dx}\sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx} = \frac{1}{3}\sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}. \tag{5}$$

于是,

$$\left|\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 x^4 f(x)dx\right| \le \frac{1}{3}\int_0^1 f^2(x)dx. \qquad (6)$$

但不等式(6)成立又等价于不等式(4), (5)都成立.

不等式(4)成立等价于存在常数$\lambda$, 使$f(x)=\lambda, x\in[0,1]$.

不等式(5)成立等价于存在常数$\mu$, 使$f(x)=\mu x^4, x\in[0,1]$.

但$1, x^4$在$L^2[0,1]$上线性无关, 因此, 不等式(6)取得等号当且仅当$f(x)=0$. 因此, 我们也不能就断言$\frac{1}{3}$为不等式(6)中的最佳常数.

# 一次成功的实践

2022年美国数学月刊4月刊也提出了如下征解的问题12318:

$a$是一个正实数, $S_a$是满足$\int_{-a}^{a} f^2(x)dx = 1$的函数 $f(x) : [-a, a] \to R$的集合. 令

$$A(f) = \int_{-a}^{a} f(x)dx, B(f) = \int_{-a}^{a} xf(x)dx, C(f) = \int_{-a}^{a} x^2 f(x)dx.$$

求:

$$\sup\left\{A^2(f) + B^2(f) \,|\, f(x) \in S_a\right\},$$

$$\sup\left\{A^2(f) + B^2(f) + C^2(f) \,|\, f(x) \in S_a\right\}.$$

这样的例子还有不少. 我们需要为类似问题的解决建立一个统一的法则.

# 问题提出



设$U$为$R^n$中的闭区域,

$$L^2(U)=\left\{f(x):U\to R\,\middle|\,\int_U f^2(x)dx<\infty\right\}.$$

又设$\rho_1(x),\rho_2(x),\cdots,\rho_m(x)$为$L^2(U)$中线性无关函数,
$A=(a_{ij})$为$m$阶实对称矩阵. 任取$f(x)\in L^2(U)$. 若
记$y=\left(\int_U \rho_i(x)f(x)dx\right)$, 由Rayleigh商不等式, 有

$$\begin{aligned}&\lambda_{\min}(A)y^Ty\\ &\le\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_{ij}\int_U\rho_i(x)f(x)dx\int_U\rho_j(x)f(x)dx=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_{ij}y_iy_j\\ &\le\lambda_{\max}(A)y^Ty\end{aligned}$$

# 问题提出



于是,

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\int_U \rho_i(x)f(x)dx\int_U \rho_j(x)f(x)dx\right| \\
&\leq \max\left(|\lambda_{\min}(A)|,|\lambda_{\max}(A)|\right) y^T y \\
&= \max\left(|\lambda_{\min}(A)|,|\lambda_{\max}(A)|\right)\sum_{i=1}^{n}\left[\int_U \rho_i(x)f(x)dx\right]^2 \\
&\leq \max\left(|\lambda_{\min}(A)|,|\lambda_{\max}(A)|\right)\sum_{i=1}^{n}\left[\int_U \rho_i^2(x)dx\int_U f^2(x)dx\right] \\
&= \left[\max\left(|\lambda_{\min}(A)|,|\lambda_{\max}(A)|\right)\sum_{i=1}^{n}\int_U \rho_i^2(x)dx\right]\int_U f^2(x)dx \\
&\triangleq M\int_U f^2(x)dx
\end{aligned}.
$$

# 问题提出



$$
\begin{aligned}
&-M\int_U f^2(x)dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\int_U \rho_i(x)f(x)dx\int_U \rho_j(x)f(x)dx \quad . \\
&\leq M\int_U f^2(x)dx
\end{aligned}
$$

于是, 存在常数$C_1, C_2$, 使得

$$
\begin{aligned}
&C_1\int_U f^2(x)dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\int_U \rho_i(x)f(x)dx\int_U \rho_j(x)f(x)dx \quad . \\
&\leq C_2\int_U f^2(x)dx
\end{aligned} \tag{7}
$$

我们的问题就是: 求使得不等式(7)成立的最优的常数$C_1, C_2$.

# 分步求解

**第一步 建立问题相应的泛函**

对任意$0 \neq f(x) \in L^2(U)$, 定义泛函

$$J(f) = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \int_U \rho_i(x) f(x) dx \int_U \rho_j(x) f(x) dx}{\int_U f^2(x) dx}.$$

**第二步 正交分解**

**引理** 设$W$为欧氏空间$V$的有限维子空间, 则$W$存在唯一的正交补空间$W^{\perp}$, 使得$V = W \oplus W^{\perp}$.

记

$$W = L\left(\rho_1(x), \rho_2(x), \cdots, \rho_m(x)\right).$$

则其存在唯一的正交补空间$W^{\perp}$, 使得$L^2(U) = W \oplus W^{\perp}$.

# 分步求解



将$f(x)$作正交分解$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{m} c_k\rho_k(x)+g(x)$, 其中, $g(x)\in W^{\perp}$, 这样,

$$\int_U f^2(x)dx=\int_U\left[\sum_{k=1}^{m} c_k\rho_k(x)\right]^2 dx+\int_U g^2(x)dx \\ =c^TGc+\int_U g^2(x)dx,$$

其中,

$$c=(c_1,c_2,\cdots,c_m)^T$$

$$G=\left(\int_L \rho_i(x)\rho_j(x)dx\right)=(g_{ij})$$

为$\rho_1(x),\rho_2(x),\cdots,\rho_m(x)$ 的Gram矩阵, 为正定矩阵.

# 分步求解

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\int_U \rho_i(x)f(x)dx\int_U \rho_j(x)f(x)dx = K^T AK,$$

这里,

$$K = \begin{pmatrix} \int_U \rho_1(x)f(x)dx \\ \int_U \rho_2(x)f(x)dx \\ \cdots \\ \int_U \rho_m(x)f(x)dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_U \rho_1(x)\left[\sum_{k=1}^{m} c_k\rho_k(x)+g(x)\right] \\ \int_U \rho_2(x)\left[\sum_{k=1}^{m} c_k\rho_k(x)+g(x)\right] \\ \cdots \\ \int_U \rho_m(x)\left[\sum_{k=1}^{m} c_k\rho_k(x)+g(x)\right] \end{pmatrix}$$

# 分步求解



$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} c_k \int_U \rho_1(x)\rho_k(x)dx \\ \sum_{k=1}^{m} c_k \int_U \rho_2(x)\rho_k(x)dx \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{m} c_k \int_U \rho_k(x)\rho_m(x)dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} g_{1k}c_k \\ \sum_{k=1}^{m} g_{2k}c_k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{m} g_{mk}c_k \end{pmatrix} = Gc$$

# 分步求解



由此,

$$J(f)=\frac{(Gc)^TA(Gc)}{c^TGc+\int_U g^2(x)dx}=\frac{c^T(G^TAG)c}{c^TGc+\int_U g^2(x)dx}.$$

又$G$为正定矩阵. 任取一个实可逆矩阵$B$, 使得$G=B^TB$, 则

$$J(f)=\frac{c^T(B^TBAB^TB)c}{c^TB^TBc+\int_U g^2(x)dx}=\frac{(Bc)^T(BAB^T)(Bc)}{(Bc)^TBc+\int_U g^2(x)dx}=\frac{y^T(BAB^T)y}{y^Ty+\int_U g^2(x)dx}.$$

这里, $y=Bc$, $y^Ty$, $\int_U g^2(x)dx$均非负, 但不全为0.

# 分步求解

**步骤三** 放缩处理

设$A$不是半负定的(至少有一个正特征值), 这样，其合同矩阵$BAB^T$至少有一个正特征值, 故

$$J(f)=\frac{y^T(BAB^T)y}{y^Ty+\int_U g^2(x)dx}\leq\frac{\lambda_{\max}(BAB^T)y^Ty}{y^Ty+\int_U g^2(x)dx}$$
$$\leq\lambda_{\max}(BAB^T)$$

于是,

$$J(f)\leq\lambda_{\max}(BAB^T). \tag{8}$$

不等式(8)取得等号当且仅当$g=0$且$y$为$BAB^T$的最大特征值所对应的特征向量.

# 分步求解

另一方面,

$$J(f)=\frac{y^T(BAB^T)y}{y^Ty+\int_U g^2(x)dx}\geq\frac{\lambda_{\min}(BAB^T)y^Ty}{y^Ty+\int_U g^2(x)dx}.$$

1. 如果$\lambda_{\min}(BAB^T)>0$, 则

$$J(f)\geq\frac{\lambda_{\min}(BAB^T)y^Ty}{y^Ty+\int_U g^2(x)dx}\geq 0,$$

故

$$J(f)\geq 0 \tag{9}$$

不等式(9)取等号当且仅当$y=0$,即$f\in W^{\perp}$.

# 分步求解

2. 如果$\lambda_{\min}(BAB^T) = 0$, 则

$$J(f) \geq \frac{\lambda_{\min}(BAB^T)y^T y}{y^T y + \int_U g^2(x)dx} = 0,$$

故

$$J(f) \geq 0 \tag{10}$$

不等式(10)取等号当且仅当$BAB^T y = 0$.

3. 如果$\lambda_{\min}(BAB^T) < 0$, 则

$$J(f) \geq \frac{\lambda_{\min}(BAB^T)y^T y}{y^T y + \int_U g^2(x)dx} \geq \lambda_{\min}(BAB^T),$$

# 分步求解

故

$$J(f) \geq \lambda_{\min}(BAB^T). \tag{11}$$

不等式(11)取得等号当且仅当$g=0$且$y$为$BAB^T$的最小特征值所对应的特征向量.

至此，问题全部得到解决.

# 算例

**例1.** $\cos x, \sin x$在$L^2\left[0,\pi\right]$中线性无关, 其Gram矩阵为

$$G=\begin{pmatrix} \int_0^\pi \cos^2 x dx & \int_0^\pi \cos x \sin x dx \\ \int_0^\pi \cos x \sin x dx & \int_0^\pi \sin^2 x dx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

取

$$B=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}, A=I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则$BAB^T=G$的特征值都是$\frac{\pi}{2}$, 特征向量为任何非零列向量, 因此,

$$\left[\int_0^\pi f(x)\cos x dx\right]^2+\left[\int_0^\pi f(x)\sin x dx\right]^2 \le \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f^2(x)dx,$$

# 算例

当且仅当$f(x) \in L(\cos x, \sin x)$, 取得等号.

$$\left[\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx\right]^2 + \left[\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx\right]^2 \geq 0,$$

当且仅当$f(x) \in L^{\perp}(\cos x, \sin x)$, 取得等号.

**例2.** $1, x^4$在$L^2(0,1)$中线性无关, 其Gram矩阵为

$$G = \begin{pmatrix} \int_0^1 dx & \int_0^1 x^4 dx \\ \int_0^1 x^4 dx & \int_0^1 x^8 dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

取矩阵$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{15} \end{pmatrix}$, 使得$G = B^T B$.

# 算例



取$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, 则$BAB^T=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{15} \\ \frac{2}{15} & 0 \end{pmatrix}$, 其最大和最小特征值分别为$\frac{4}{15}, -\frac{1}{15}$, 分别对应特征向量$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

于是,

(i)

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{15}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x,$$

且当且仅当

$$f(x)=k(1,x^4)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{15} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{5}{4}k(1+3x^4),$$

不等式取得等号.

# 算例



$$\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 x^4 f(x)dx \geq -\frac{1}{3}\int_0^1 f^2(x)dx,$$

且当且仅当

$$f(x) = k(1, x^4)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{15} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}k(1-3x^4),$$

不等式取得等号.